Über geschlossene Streckenzüge mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt II

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 46, 1995, S.21-28

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über geschlossene Streckenzüge mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt II

Von **Hans Robert Müller***, Wolfenbüttel

(Eingegangen am 10.2.95)

In Teil I (Siehe [1]) wurden *geschlossene Streckenzüge* im dreidimensionalen euklidischen Raum betrachtet, deren Parallelprojektionen in beliebiger Richtung n einen verschwindenden orientierten Flächeninhalt des Bildes in der Ebene ε aufweisen.

Unter Bezug auf ein orthonormiertes Dreibein $\{0; e_1, e_2, e_3\}$ werden die Eckpunkte P_i durch die Vektoren $\overrightarrow{OP}_i = x_i$ für $i = 1, 2, \dots N$ erfaßt. Die Geschlossenheit des räumlichen N-Ecks wird durch

$$\sum_{i=1}^{N} x_{i+1} - x_i = 0 \tag{1}$$

ausgedrückt. Des affinen Charakters wegen kann man sich auf Normalprojektionen ($n \perp \varepsilon$) beschränken und findet als kennzeichnende Bedingung

$$\sum_{i=1}^{N} x_i \times x_{i+1} = 0 \tag{2}$$

In Teil I wurde auch kurz angedeutet, wie man Streckenzüge der gewünschten Projektionseigenschaft konstruieren, d.h. berechnen kann. Dieser Konstruktionsweg möge nun noch näher ausgeführt und an einem Beispiel (räumliches 6-Eck) erprobt werden. Ausgang ist die willkürliche Wahl von $N-1$ Eckpunkten P_i $(i = 1, 2, \dots N-1)$, die durch geeignete Hinzunahme eines N-ten Punktes P_N zu einem geschlossenen Streckenzug (N-Eck) mit verschwindendem Projektionsinhalt ergänzt werden sollen. Wir schreiben die kennzeichnende Bedingung (2) durch Zerlegung in der Form von

$$\sum_{i=1}^{N-2} x_i \times x_{i+1} = w \tag{3}$$

und

$$(x_{N-1} - x_1) \times x_N + w = 0. \tag{4}$$

Die Vektorgleichung (4) läßt sich bei Aufspaltung in ihre Komponenten als lineares inhomogenes Gleichungssystem zur Bestimmung von x_{Nk} $(k = 1, 2, 3)$ auffassen. In Teil I wurde dieses schief-symmetrische System mit verschwindender Koeffizientendeterminante explizit geschrieben. Da der Rang der Koeffizientenmatrix 2 ist, hängt es bei freier Wahl von $P_1, P_2 \dots P_{N-1}$ von w ab, ob die erweiterte Matrix den Rang 2 oder 3 hat. In letzterem Fall hat (4) keine Lösung. Skalare Produktbildung von (4) mit $(x_{N-1} - x_1)$ ergibt für w die Bedingung

$$w \cdot (x_{N-1} - x_1) = 0. \tag{5}$$

* Prof. em. Dr. H. R. Müller · Am Schiefen Berg 49 · 38302 Wolfenbüttel

Durch etwaige Abänderung der Koordinaten eines der gewählten Punkte kann die Lösbarkeit von (4) erzwungen werden. Ex existieren dann ∞^1 Lösungen x_N, die den Punkten einer Raumgeraden entsprechen.

Beispiel der Konstruktion eines 6-Ecks:

Zur Vereinfachung verlegen wir ein Glied des Streckenzuges in die Ebene ε, die übrigen Punkte $P_1, P_2 \dots P_5$ sind bei Gültigkeit von (5) willkürlich gewählt.

$P_1(3,0,0)$, $P_2(-3,0,0)$, $P_3(-1,-3,1)$, $P_4(-4,-2,-1)$, $P_5(2,2,3)$. Es ist dann $x_1 \times x_2 = (0,0,0)$, $x_2 \times x_3 = (0,3,9)$, $x_3 \times x_4 = (5,-5,-10)$, $x_4 \times x_5 = (-4,10,-4)$, sowie

$$w = \sum_{i=1}^{4} x_i \times x_{i+1} = (1,8,-5) \text{ und } x_5 - x_1 = (-1,2,3).$$

Die Gleichung (4) lautet nun

$$(-1,2,3) \times (x_{61}, x_{62}, x_{63}) + (1,8,-5) = 0$$

oder ausführlich

$$\left.\begin{array}{rrrrl} \cdot & -3x_{62} & +2x_{63} & +1 & =0 \\ 3x_{61} & \cdot & +x_{63} & +8 & =0 \\ -2x_{61} & -x_{62} & \cdot & -5 & =0 \end{array}\right\}$$

Faßt man x_{63} als Parameter der Lösungen auf, so erhält man $x_{61} = -\frac{1}{3}x_{63} - \frac{8}{3}$, $x_{62} = \frac{2}{3}x_{63} + \frac{1}{3}$ als Parameterdarstellung aller Lösungspunkte von P_6.

Wir wählen im bes. $x_{63} = 4$ und finden $P_6(-4,3,4)$. Wegen $x_5 \times x_6 = (-1,-20,14)$ und $x_6 \times x_1 = (0,12,-9)$ bestätigen wir $w + x_5 \times x_6 + x_6 \times x_1 = 0$.

In der Normalprojektion des 6-Ecks (vgl. Abb. 1) auf die Ebene ε treten 3 *scheinbare Doppelpunkte* auf: $S_1^n(-1,0)$, $S_2^n\left(-\frac{31}{13}, -\frac{12}{13}\right)$, $S_3^n\left(\frac{13}{23}, \frac{24}{23}\right)$.

In Teil I wurde beschrieben, wie die Sichtbarkeitsverhältnisse zu klären sind:

S_1^n ist Grundriß eines Punktes auf P_1P_2 mit der Kote 0 und eines Punktes auf P_4P_5 mit der Kote 1: „P_4P_5 liegt über P_1P_2".

S_2^n ist Grundriß eines Punktes auf P_4P_5 mit der Kote $\frac{1}{13}$ und eines Punktes auf P_2P_3 mit der Kote $\frac{14}{13}$: „P_2P_3 liegt über P_4P_5".

S_3^n ist Grundriß eines Punktes auf P_4P_5 mit der Kote $\frac{47}{23}$ und eines Punktes auf P_6P_1 mit der Kote $\frac{32}{23}$: „P_4P_5 liegt über P_6P_1".

In Abb. 1 ist diese Sichtbarkeit berücksichtigt und sind gegensinnig umlaufene Flächenstücke durch + bzw. – angedeutet.

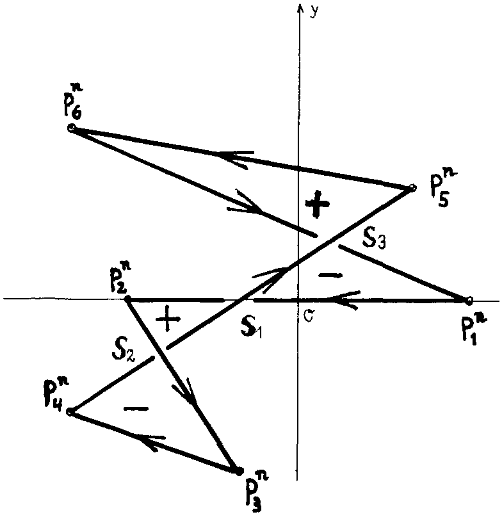

Abb. 1

Eine andere Methode, räumliche Streckenzüge der betrachteten Projektionseigenschaft zu konstruieren, besteht darin, von der *Normal-Projektion auf die Ebene ε auszugehen*, d.h. den Grundriß des Streckenzuges frei zu wählen und die Koten $k_i = x_{i3}$ der Eck-Punkte P_i über der Ebene ε aus linearen Gleichungen zu ermitteln.

Der Grundriß muß hierbei natürlich so gewählt werden, daß auch für ihn die Nulleigenschaft der Projektion gewährleistet ist. Als Beispiel werden die Grundrißpunkte P_i^n eines *räumlichen Sechsecks* als Eckpunkte eines *ebenen regelmäßigen 6-Ecks in ε* gewählt:

Mit den Vereinfachungen $h = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $k_1 = 0$ setzen wir:

$$P_1\,(0, 1, 0),\ P_2\left(-h, -\frac{1}{2}, k_2\right),\ P_3\,(0, -1, k_3),\ P_4\left(-h, \frac{1}{2}, k_4\right),\ P_5\left(h, \frac{1}{2}, k_5\right),$$

$$P_6\left(h, -\frac{1}{2}, k_6\right).$$

Damit finden wir

$$x_1 \times x_2 = (k_2, 0, h),\ x_2 \times x_3 = \left(k_2 - \frac{1}{2}k_3, hk_3, h\right),$$

$$x_3 \times x_4 = \left(-\frac{1}{2}k_3 - k_4, -h\,k_3, -h\right),\ x_4 \times x_5 = \left(\frac{1}{2}(k_5 - k_4), h\,(k_4 + k_5), -h\right),$$

$$x_5 \times x_6 = \left(\frac{1}{2}(k_5 + k_6), h\,(k_5 - k_6), -h\right),\ x_6 \times x_1 = (-k_6, 0, h).$$

Durch Nullsetzen der Summe $\sum_{i=1}^{6} x_1 \times x_{i+1}$ gelangen wir zu zwei linearen Gleichungen

$$2\,k_2 - k_3 - 2\,k_4 = 0$$
$$k_4 + 2\,k_5 - k_6 = 0$$

und wollen als Lösungen

$$k_1 = 0, k_2 = 7, k_3 = 6, k_4 = 4, k_5 = 5, k_6 = 14$$

wählen.

In der Projektion auf ε treten 3 scheinbare Doppelpunkte auf:

$$S_1\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right), S_2\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right), S_3\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right).$$

In ihnen liegen bzw. „P_5P_6 über P_1P_2“, „P_3P_4 über P_1P_2“ und „P_6P_1 über P_4P_5“. (vgl. Abb. 2).

Solche Sichtbarkeitsuntersuchungen sind in jedem Fall eines scheinbaren Doppelpunktes wichtig, um Schnittpunkte zweier Glieder eines Streckenzuges zu erkennen: Die Übereinstimmung der betreffenden Koten kennzeichnet die auszuschließenden Streckenzüge mit Schnittpunkten.

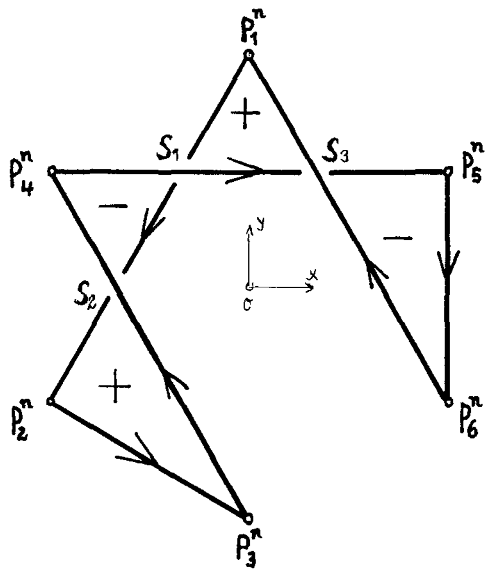

Abb. 2

Nun beweisen wir den

Satz: *Die Existenz eines räumlichen 4-Ecks sowie eines 5-Ecks, deren Normalprojektionen auf eine Ebene zum orientierten Flächeninhalt Null der Bildpolygone führen, ist unmöglich.*

Wir wenden die auf den Formeln (3) und (4) fußende Methode an:[1])

4-Eck:

$P_1\,(a, 0, 0)$, $P_2\,(-a, 0, 0)$, $P_3\,(b, c, d)$, $P_4\,(x, y, z)$ mit $a \neq 0$, $x_1 \times x_2 = (0, 0, 0)$, $x_2 \times x_3 = (0, ad, -ac)$, $x_3 - x_1 = (b - a, c, d)$, somit

$$w = w_4 = (0, ad, -ac),$$
$$(x_3 - x_1) \times x_4 + w_4 = (b - a, c, d) \times (x, y, z) + (0, ad, -ac) = 0$$

oder

$$[cz - dy, dx - (b-a)\,z, - cx + (b-a)\,y] + (0, ad, -ac) = 0.$$

Ausführlich geschrieben ergibt sich das Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned} \cdot \quad - dy + cz \quad &= 0 \\ dx \cdot - (b - a)\,z + ad &= 0 \\ - cx + (b - a)\,y \cdot - ac &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und daraus die Lösungen

$$x = \frac{1}{d}\,[(b - a)\,z - ad], \quad y = \frac{c}{d}\,z.$$

Der Rang der erweiterten Matrix ist 2, wie aus (5) folgt:

$$w_4 \cdot (x_3 - x_1) = (0, ad, -ac) \cdot (b - a, c, d) = 0.$$

Wir vermerken $dy - cz = 0$ und deuten dies durch Anwendung der Volumsformel für das von den Punkten P_4, P_2, P_3, P_4 gebildete Tetraeder:

$$\begin{vmatrix} 1, & a, & 0, & 0 \\ 1, & -a, & 0, & 0 \\ 1, & b, & c, & d \\ 1, & x, & y, & z \end{vmatrix} = -2a\,(cz - dy) = 0.$$

Die 4 Eckpunkte liegen somit in einer Ebene; die auftretenden scheinbaren Doppelpunkte sind Schnittpunkte.

Es ist somit unmöglich, ein 4-Eck der gewünschten Projektionseigenschaft zu konstruieren.

---

[1]) Zur Vereinfachung der Schreibweise wurden die Koordinaten der Punkte P_i durch fortlaufende Buchstaben des Alphabets bezeichnet.

5-Eck:

Zum Beweis gehen wir in gleicher Weise vor.
P_1 (a, 0, 0), P_2 (–a, 0, 0), P_3 (b, c, d), P_4 (e, f, g), P_5 (x, y, z), daraus

$$w = w_5 = w_4 + x_3 \times x_4 = w_4 + (cg - df,\ de - bg,\ bf - ce)$$

oder

$$w_5 = (cg - df,\ ad + de - bg,\ -ac + bf - ce).$$

Mit $x_4 - x_1 = (e - a, f, g)$ nimmt nach (4) das Gleichungssystem die Form

$$(e - a, f, g) \times (x, y, z) + w_5 = 0$$

oder

$$(fz - gy,\ gx - (e - a)\,z,\ (e - a)\,y - fx) + W_5 = 0$$

an, schließlich in ausführlicher Schreibweise

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ - gy + fz \quad + cg - df = 0 \\ g x \cdot - (e - a)\,z + ad + de - bg = 0 \\ - f x + (e - a)\,y \cdot\ - ac + bf - ce = 0 \end{array}\right\}$$

Als Bedingung für den Rang 2 der erweiterten Matrix fordern wir gemäß (5)

$$w_5 \cdot (x_4 - x_1) = 0,$$

was wegen $a \neq 0$ zu

$$cg - df = 0 \tag{6}$$

führt und als Lösungen des Gleichungssystems

$$x = \frac{1}{g}\,[+ (e - a)\,z - ad - de + bg],\ y = \frac{f}{g}\,z$$

liefert.

Bei Berechnung der von den Punkten P_1, P_2, P_3, P_4 bzw. P_1, P_2, P_3, P_5 aufgespannten *Tetraeder-Volumina* treten die Determinanten auf:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & b & c & d \\ 1 & e & f & g \end{vmatrix} = -2a\,(cg - df),\quad \begin{vmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & -a & 0 & 0 \\ 1 & b & c & d \\ 1 & x & y & z \end{vmatrix} = -2a\,(cz - dy) = \frac{-2az}{g}\,(cg - df)$$

Wegen (6) verschwinden beide Determinanten, die 5 Punkte P_i sind also komplanar. In einem ebenen 5-Eck können nur Schnittpunkte von Seiten auftreten.

Es ist somit unmöglich, ein 5-Eck der gewünschten Projektionseigenschaft zu konstruieren.

Wir wollen noch einmal an den Anfang der Betrachtung unserer speziellen räumlichen Polygone, d.h. zu deren Definition zurückkehren und diese Streckenzüge auf eine andere Weise beschreiben.

Wir denken uns jede einzelne Strecke eines Streckenzuges mit einem beliebigen Punkt Q des Raumes verbunden. Dadurch entsteht eine Folge von aneinander schließenden Dreiecken, die einen pyramidenförmigen „Trichter" bilden, der in den Streckenzug eingehängt bzw. ihm aufgesetzt erscheint. Wir berechnen den Flächeninhalt des Mantels dieser Pyramide im Raum und insbesondere den Inhalt deren Normalprojektion in Richtung n auf die Ebene ε.

Die Pyramidenspitze Q werde durch $\overrightarrow{OQ} = q$ erfaßt, für ihren Normalriß Q^n gilt

$$q^n = q - (nq)\, n, \tag{7'}$$

ebenso für die Punkte Pi mit $\overrightarrow{OP}_i = x_i$ für deren Projektion P_i^n

$$x_i^n = x_i - (nx_i)\, n. \tag{7}$$

Wir führen noch $\overrightarrow{QP}_i = y_i$ ein und haben

$$\overrightarrow{OP}_i = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}_i = q + y_i = x_i.$$

Die einzelnen Seitenflächen der Pyramide sind Dreiecke $QP_i\, P_{i+1}$, die als Dreiecke $Q^nP_i^nP_{i+1}^n$ abgebildet werden. Der *Flächenvektor* f_i^n dieses Bilddreiecks wird durch das Vektorprodukt

$$2\, f_i^n = y_i^n \times y_{i+1}^n$$

dargestellt. Der zugehörige *skalare Flächeninhalt* ist dann

$$2\, F_i^n = n(y_i^n \times y_{i+1}^n).$$

Somit ist der Inhalt F^n des Grundrisses des Pyramidenmantels

$$2\, F^n = n \sum_{i=1}^{N} y_i^n \times y_{i+1}^n$$

oder ausführlicher

$$2\, F^n = n \sum_{i=1}^{N} (x_i^n - q^n) \times (x_{i+1}^n - q^n)\,.$$

Wegen $\sum\limits_{i=1}^{N} (x_i^n \times q^n) = \left(\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^n\right) \times q^n$ und $\sum\limits_{i=1}^{N} x_i \sum\limits_{i=1}^{N} x_{i+1}$ und nach Berücksichtigung von (7) erhalten wir schließlich

$$2\, F^n = n \sum_{i=1}^{N} x_i \times x_{i+1}.$$

Die geschlossenen Streckenzüge des 3-dimensionalen euklidischen Raumes, deren Normalprojektionen einen verschwindenden orientierten Flächeninhalt des Bildes besitzen, können auch dadurch erklärt werden, daß *die Normalprojektionen der durch die Streckenzüge gelegten Pyramiden mit beliebiger Spitze Mantelflächen vom orientierten Flächeninhalt Null besitzen.* (Vgl. hierzu die allgemeinere Aussage in [2].)

Literaturverzeichnis

[1] Müller, H.R.: Über geschlossene Streckenzüge mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt. I. Abhandl. d. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 45 (1994), 35–38

[2] Müller, H.R.: Geschlossene Raumkurven mit Normalrissen von verschwindendem Flächeninhalt. Abhandl. d. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 34 (1982), 39–45
Müller, H.R.: Über geschlossene Raumkurven mit der Parameter-Darstellung x(t), für die $\oint x \times dx = 0$ gilt. Abhandl. der Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 45 (1994), 29–34.